確率微分方程式の近似解に対する初通過時間の収束(確率数値解析に於ける諸問題)

数理解析研究所講究録
850巻 1993年 59-71

確率微分方程式の近似解に対する初通過時間の収束

横浜国立大学　工学部　清水昭信 (Akinobu Shimizu)

1. Introduction

拡散過程の初通過時間の分布を求めることは、応用上重要であると思われるが、これを数学的に exact に明らかとすることは一般に困難である。そこで、確率微分方程式を乱数を用いて数値的近似的に解き初通過時間の分布を求めることが必要になる。 ここで、一つの数学の問題に遭遇する。即ち、確率過程の列 $\{x^{\varepsilon}(t)\}$ が分布の意味で確率過程 $\{x(t)\}$ に収束しているとき、$\{x^{\varepsilon}(t)\}$ に対する初通過時間の分布は $\{x(t)\}$ の初通過時間の分布に収束するだろうか？

解の存在と（法則の意味の）解の一意性が成り立つような１次元確率微分方程式

$$dx(t) = a(x(t))\,dB_t + b(x(t))\,dt \qquad (1.\ 1)$$

と、この（なんらかの）近似解 $\{x^{\varepsilon}(t)\}$ を考える。この近似解は（1. 1）の解に分布の意味で収束しているとしよう。係数 $a(x)$ が退化していない点への $\{x(t)\}$ の初通過時間は $\{x(t)\}$ の測度に関して確率１で道の関数として連続であるから、近似解に対する初通過時間の分布は解に対する初通過時間の分布に収束しており問題はない。（1. 1）の解が半直線 $[0,+\infty)$ を状態空間とする場合の原点０への初通過時間は道の関数として連続でなく、このケースが問題となる。

係数 $a(x)$ が1/2-Hölder 連続 かつ $a(0)=0$、$b(x)$ は Lipschitz連続 かつ $b(0)\geqq 0$ としよう。 このとき、（1. 1）は unique strong solution を持つ。 近似解として、いわゆる 丸山の近似解 (polygonal approximation) を考える。このとき、（1. 1）の解と 近似解は 同一の確率空間上で与えられているので近似解に対する原点への初通過時間は、（1. 1）の解の原点への初通過時間に（分布の収束より強く）確率収束するかどうかという問題が生ずる。

このノートでは、

$$a(x) = \{\max(x,\ 0)\}^{1/2}$$

$$b(x) = 0$$

の場合、上の問題に肯定的な結論が得られることを示す。

2．Preliminaries

この節では、$\{x(t)\}$，$\{x^n(t)\}$ $(n\in N)$ は R^1－valued stochastic processes with continuous paths であり

$$x(0)=x^n(0)=x\in R^1$$

とする。 区間（a，b）に対して

$$\tau(a,b)=\inf\{t\geqq 0 : x(t)\notin(a,b)\}$$

$$\tau^n(a,b)=\inf\{t\geqq 0 : x^n(t)\notin(a,b)\}$$

とおく。 このとき、次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1 次の （a），（b），（c）を仮定する。

（a）任意の有限のTに対して

$$\lim_{n\to+\infty}E[\sup_{0\leq t\leq T}|x^n(t)-x(t)|^2]=0$$

（b）ある正数ε_0に対して

$$P[\tau(a-\varepsilon_0, b+\varepsilon_0)<+\infty]=1$$

（c）$\tau(a, b)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\tau(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ a.s.

このとき、自然数全体Nの無限部分集合Mが存在して

$$\lim_{k\in M}\tau^k(a, b)=\tau(a, b) \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ。

（証明）

εは $0<\varepsilon<\varepsilon_0$をみたすようにとり，$a<x<b$とする。
$\alpha=a-\varepsilon$，$\beta=b+\varepsilon$とおく。

仮定（a）から

$$\lim_{n\in N}E[|x^n(\tau(\alpha,\beta)\wedge T)-x(\tau(\alpha,\beta)\wedge T)|^2]=0 \qquad (2.1)$$

が任意の有限のTに対して成り立つ。従って、自然数Nの無限部分集合Lが存在して

$$\lim_{l\in L}x^l(\tau(\alpha, \beta)\wedge T)=x(\tau(\alpha, \beta)\wedge T) \quad a.s.$$

が成り立つ。 ここで、対角線論法により、部分集合（部分列）LはTに依存しないようにとれる。

$$\Omega_T=\{\tau(\alpha, \beta)<T\}$$

とおくと、仮定（b）により

$$\Omega_T\uparrow \quad \text{かつ} \quad P(\cup_T\Omega_T)=1$$

となる。 $\omega\in\Omega_T$ならば

$$x(\tau(\alpha, \beta)\wedge T)=\alpha \text{ or } \beta \quad \text{a.s.}$$

だから、十分大なる $l=l(\omega)\in L$に対して

$$x^l(\tau(\alpha, \beta))\notin(a, b)$$

であり、

$\tau^{l}(a, b) \leqq \tau(\alpha, \beta)$

となる。 従って、 $\omega \in \Omega_T$ のとき

$$\limsup_{l \in L} \tau^{l}(a, b) \leqq \tau(\alpha, \beta) \qquad (2.2)$$

が成り立ち、Tは任意だから、(2. 2) は a.s. に成り立つ。

仮定 (b) と (2. 2) により

$$\limsup_{l \in L} \tau^{l}(a, b) < +\infty \quad \text{a.s.} \qquad (2.3)$$

が成り立つ。

再び仮定 (a) を用いて、任意の有限のTに対して

$$\lim_{n \in N} E[\,|x^{n}(\tau^{n}(a, b) \wedge T) - x(\tau^{n}(a, b) \wedge T)|^{2}] = 0 \qquad (2.4)$$

の成り立つことがわかる。 この式は、自然数Nにかえて、上に表れたLを用いても成り立つ。 従って、(対角線論法を用いて) (ここでは自然数とする) Tに依存しない (Lの) 無限部分集合Mが存在し

$$\lim_{m \in M} |x^{m}(\tau^{m}(a,b) \wedge T) - x(\tau^{m}(a,b) \wedge T)| = 0 \quad a.s \qquad (2.5)$$

一方、

$\Omega'_T = \{\limsup_{l \in L} \tau^{l}(a, b) < T\}$

とおくと、(2. 3) により

$$\Omega'_T \uparrow \quad かつ \qquad P(\cup_T \Omega'_T) = 1 \qquad (2.6)$$

である。

従って、$\omega \in \Omega'_T$ であるとき、十分大なる $m = m(\omega) \in M$ に対して

$\tau^{m}(a, b) < T$ となり

$x^{m}(\tau^{m}(a, b) \wedge T) = x^{m}(\tau^{m}(a, b)) = a \ \ or \ \ b$

であるから、(2. 5) により 十分大なる $m' = m'(\omega) \in M$ に対して

$x(\tau^{m'}(a, b)) \notin (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$

(ここで、ε はあらかじめ証明の最初に与えた正数) が成り立つ。

故に $\omega \in \Omega'_T$ のとき、

$\tau(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \leqq \tau^{m'}(a, b)$

であり

$$\tau(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \leqq \liminf_{m \in M} \tau^{m}(a, b) \qquad (2.7)$$

となる。 (2. 6) により、(2. 7) は a.s.で成り立つことが分かる。

(2. 2) と (2. 7) によって, 不等式

$\tau(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \leqq \liminf_{m \in M} \tau^{m}(a, b)$

$$\leqq \limsup_{m\in M} \tau^m(a, b) \leqq \limsup_{l\in L} \tau^l(a, b)$$
$$\leqq \tau(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \qquad (2.8)$$

が確率１で成り立つ。

ｐａｔｈの連続性により　$\varepsilon \downarrow 0$　とするとき

$\tau(a+\varepsilon, b-\varepsilon) \uparrow \quad \tau(a, b) \qquad$ a.s.

であり、一方　仮定（ｃ）により

$\tau(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \downarrow \quad \tau(a, b) \qquad$ a.s.

であるから、（２．８）より

$\lim_{m\in M} \tau^m(a, b) = \tau(a, b) \qquad$ a.s.

となる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終わり。

３．First exit time of a bounded interval where the diffusion coefficient is uniformly positive

この節では、確率微分方程式（１．１）の近似解について考えるが、係数 ａ(x)は 1/2-Hölder continous, b(x)は Lipschitz continuousであるとする。このとき、（１．１）は unique strong solution を持つことが知られている。

time interval $[0, +\infty)$ の分割を

$\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$

とし　$\|\Delta\| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$　とおく。

$\phi_\Delta(s) = t_i \quad for \quad s \in [t_i, t_{i+1})$

とおき、丸山の近似解 $\{x_\Delta(t)\}$　を

$$x_\Delta(t) - x = \int_0^t a(x(\phi_\Delta(s)))\, dB_s + \int_0^t b(x(\phi_\Delta(s)))\, ds \qquad (3.1)$$

により定義する。

$\|\Delta(n)\| \to 0 \quad (n \in N,\ n \to +\infty)$ となるような分割の列に対する近似解の列 $x^n(t) \equiv x_{\Delta(n)}(t)$　を考え、$\tau(a, b)$ および　$\tau^n(a, b)$ は第２節において定義したものとする。

Ｈ．Ｋａｎｅｋｏ　ａｎｄ　Ｓ．Ｎａｋａｏ［4］において

$$\lim_{n\to+\infty} E[\sup_{0\leqq t\leqq T} |x^n(t) - x(t)|^2] = 0 \qquad (3.2)$$

(for any finite T)

の成り立つことが示されており、これをもちいて、つぎの定理を得る。

Theorem 3.1
閉区間［a，b］において、$a(x)^2>0$であることを仮定する。
このとき、$n\to+\infty$ とすれば

$$\tau^n(a,b)\to\tau(a,b) \quad \text{in probability} \tag{3. 3}$$

が成り立つ。

（証明）

x∈（a．b）とする。

最初に自然数全体Nの任意の無限部分集合Mに対して、Mの無限部分集合Lが存在して

$$\tau^l(a,b)\to\tau(a,b) \quad \text{a.s.} \quad (l\in L,\ l\to+\infty) \tag{3. 4}$$

が成り立つことを示そう。

定理2．1　の仮定（a）は、（3．2）により無限部分集合Mに対して成り立っているから、仮定（b）と（c）の成り立つことを注意すればよい。

この定理の仮定から、ある正数εが存在して

$$a(x)\neq0 \quad \text{for} \quad x\in[a-\varepsilon,\ b+\varepsilon]$$

となるから、簡単な計算により

$$P[\ \tau(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)<+\infty]=1$$

であり、かつ　$\varepsilon\downarrow0$のとき

$$\tau(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon)\downarrow\tau(a,b) \quad \text{a.s.}$$

となる。　従って、定理2．1が適用出来て、（3．4）の成り立つことが分かる。

次に、

$$\lim_{n\to+\infty}\tau^n(a,b)=\tau(a,b) \quad \text{in probability}$$

を否定しよう。

即ち、正数δ_0とδ_1とNの無限部分集合M’が存在して
任意のm’∈M’に対して

$$P[\,|\tau^{m'}(a,b)-\tau(a,b)|\geqq\delta_0]\geqq\delta_1 \tag{3. 5}$$

となる。

前半の議論により、このM’の無限部分集合M”が存在して

$$\tau^{m''}(a,b)\to\tau(a,b) \quad \text{a.s.} \quad (m''\in M'',\ m''\to+\infty)$$

となる。　これは、（3．5）と矛盾する。

証明終わり。

次の節で必要となる命題を、ここで述べておく。

Proposition 3.2

(S, d), (S', d')は separable metric spaces であり, X_n ($n \in N$), X は S−valued random variables defined on the same probability space, h_k, h は S→S' の Borel measurable mappings で次の3条件を満たすとする。

(a) $h_k(X_n) \to h_k(X)$ in probability $(n \to +\infty)$ for any k,

(b) $h_k \to h$ a.s. (Xの分布に関して) $(k \to +\infty)$

(c) $\lim_k \overline{\lim_n} P[d'(h_k(X_n), h(X_n)) > \varepsilon] = 0$

for any $\varepsilon > 0$

このとき、

$$\lim_n h(X_n) = h(X) \quad \text{in probability}$$

である。

(証明)

不等式

$$d'(h(X_n), h(X)) \leqq d'(h(X_n), h_k(X_n)) + d'(h_k(X_n), h_k(X)) + d'(h_k(X), h(X))$$

において

条件(c)から

$$\lim_k \overline{\lim_n} P[(\text{右辺第1項}) \geqq \varepsilon/3] = 0,$$

条件(a)から

$$\lim_n P[(\text{第2項}) \geqq \varepsilon/3] = 0,$$

条件(b)から

$$\lim_k P[d'(h_k(X), h(X)) \geqq \varepsilon/3] = 0.$$

従って、

$$\lim_n P[d'(h(X_n), h(X)) > \varepsilon] = 0$$

証明終わり。

4. First passage time to the boundary in a degenerate stochastic differential equation

この節では、１次元確率微分方程式

$$dx(t) = \{max(x(t),\ 0)\}^{1/2}\ dB_t \qquad (4.1)$$

$$x(0) = x \in (0,\ +\infty)$$

と、（3．1）で定義した丸山の近似解を考える。
第３節と同様、時間区間［0，＋∞）の分割の列　$\Delta(n)$，$n \in N$，で $\|\Delta(n)\| \to 0$，$(n \to +\infty)$，をみたすものと、これに対応する近似解 $x^n(t) \equiv x_{\Delta(n)}(t)$ を取り扱う。記号の簡略化のために、
$\phi_n(s) \equiv \phi_{\Delta(n)}(s)$ とおく。
$a<b$　とするとき　$\tau(a,\ b)$ および　$\tau^n(a,\ b)$ は第３節で定義したものとする。

$$\tau(a) = \tau(0,\ a),\quad \tau^n(a) = \tau^n(0,\ a)$$

$$\tau = \tau(+\infty),\quad \tau^n = \tau^n(+\infty)$$

とおく。

$$\tau = \inf\{t \geqq 0 :\ x(t) = 0\}$$

$$\tau^n = \inf\{t \geqq 0 :\ x^n(t) = 0\}$$

である。

$$E[\tau(a)] = 2x(\log a - \log x) \quad \text{for} \quad 0<x<a$$

および

$$P[\tau<+\infty] = 1,\ E[\tau] = +\infty$$

となることに注意しておく。　この節では

$$g_0(x) = 2x(\log a - \log x) \qquad (4.2)$$

とおく。
　$0<\varepsilon<a$　のとき、定理３．１によれば、$n \uparrow +\infty$とすれば

$$\tau^n(\varepsilon,\ a) \to \tau(\varepsilon,\ a) \qquad \text{in probability}$$

である。　次に、定理３．２を適用して

$$\tau^n(a) \to \tau(a) \qquad \text{in probability} \qquad (4.3)$$

を示したい。　もし、（4．3）が成り立てば、再び定理３．２を使って

$$\tau^n \to \tau \qquad \text{in probability}$$

が成り立つことが分かるだろう。
　（4．3）を示すために、定理３．２の条件（c）の満たされることを check しなければならないが、このために、次のいくつかの補題が必要となる。

Lemma 4.1

$$E\left[\int_{[0,\tau^n(a)]} \{x^n(\phi_n(s))/x^n(s)\}\,ds\right] \leqq g_0(x)$$

（証明）

Ito の公式により、任意の有限のTに対し、

$$g_0(x^n(\tau^n(\varepsilon, a)\wedge T)) - g_0(x)$$

$$= \int_{[0,\tau^n(\varepsilon,a)\wedge T]} g_0'(x^n(s))\{x^n(\phi_n(s))\}^{1/2}\,dB_s$$

$$+ \int_{[0,\tau^n(\varepsilon,a)\wedge T]} (1/2)\,g_0''(x^n(s))\,x^n(\phi_n(s))\,ds$$

従って

$$0 \leqq E[g_0(x^n(\tau^n(\varepsilon, a)\wedge T))]$$

$$= g_0(x) - E\left[\int_{[0,\tau^n(\varepsilon,a)\wedge T]} \{x^n(\phi_n(s))/x^n(s)\}\,ds\right]$$

故に

$$E\left[\int_{[0,\tau^n(\varepsilon,a)\wedge T]} \{x^n(\phi_n(s))/x^n(s)\}\,ds\right] \leqq g_0(x)$$

ここで、$\varepsilon\downarrow 0$，$T\uparrow+\infty$とすればよい。　　　　証明終わり。

Lemma 4.2

$$E[\tau^n(a)] \leqq 2(g_0(x) + \|\Delta(n)\|)$$

（証明）　$\{x^n(\phi_n(s))/x^n(s)\}$

$$= 1 + (x^n(\phi_n(s)) - x^n(s))/x^n(s)$$

$$= 1 - \{x^n(\phi_n(s))\}^{1/2}(B_s - B_{\phi n(s)})/x^n(s)$$

$$\geqq 1 - [x^n(\phi_n(s))\})^{1/2}(B_s - B_{\phi n(s)})/x^n(s)] \times$$

$$\times I[B_s - B_{\phi n(s)} \geqq 0]$$

（ I [A] は、集合Aの定義関数を表す。）

$$\geqq 1 - I[B_s - B_{\phi n(s)} \geqq 0] = I[B_s - B_{\phi n(s)} \leqq 0]$$

であるから、Lemma 4.1　より

$$g_0(x) \geqq E\left[\int_{[0,\tau^n(a)]} I[B_s - B_{\phi n(s)} \leqq 0]\, ds\right] \qquad (*)$$

となる。　不等式

$$I[\phi_n(s) < \tau^n(a)] \leqq I[s \leqq \tau^n(a)] + I[s - \|\Delta(n)\| \leqq \tau^n(a) \leqq s]$$

に注意して

$$(*) \geqq E\left[\int_0^{+\infty} I[B_s - B_{\phi n(s)} \leqq 0]\, I[\phi_n(s) < \tau^n(a)]\, ds\right]$$

$$- E\left[\int_0^{+\infty} I[B_s - B_{\phi n(s)} \leqq 0]\, I[s - \|\Delta(n)\| \leqq \tau^n(a) \leqq s]\, ds\right]$$

$$\geqq \int_0^{+\infty} E\left[E\left[I[B_s - B_{\phi n(s)} \leqq 0] \mid F_{\phi n(s)}\right] I[\phi_n(s) < \tau^n(a)]\right] ds$$

$$- \|\Delta(n)\|$$

$$= (1/2)\int_0^{+\infty} E[I[\phi_n(s) < \tau^n(a)]]\, ds - \|\Delta(n)\|$$

$$\geqq (1/2)\int_0^{+\infty} E[I[s < \tau^n(a)]]\, ds - \|\Delta(n)\|$$

$$= (1/2)\, E[\tau^n(a)] - \|\Delta(n)\|$$

この式から、求める不等式を得る。　　　　　　　　　証明終わり。

<u>Lemma 4.3</u>　　任意の正数 δ に対して

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} P[|\tau^n(\varepsilon, a) - \tau^n(a)| > \delta] = 0$$

が成り立つ。

（証明）

$\|\Delta(n)\| < \delta$　としてよいこと、および　近似解の　単純マルコフ性を考慮し

$$P\left[\,|\tau^n(\varepsilon, a)-\tau^n(a)|>\delta\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P\left[\tau^n(a)-\tau^n(\varepsilon,a)>\delta,\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{+\infty} P\left[\tau^n(a)>\delta+t_k,\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{+\infty} P\left[\tau^n(a)-t_{k+1}>\delta-\|\Delta(n)\|;\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left[P_y\left[\tau^n(a)>\delta-\|\Delta(n)\|\right]\,\big|_{y=x^n(t_{k+1})};\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

ここで、Lemma 4.2 を用いて

$$\leqq 2(\delta-\|\Delta(n)\|)^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty} E\left[g_0(x^n(t_{k+1}))+\|\Delta(n)\|;\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$= 2(\delta-\|\Delta(n)\|)^{-1}\left\{\|\Delta(n)\|+\sum_{k=0}^{+\infty} E\left[g_0(x^n(t_{k+1}));\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]\right. \tag{4.4}$$

任意の有限のTに対して

$$J(h)=\max_{0\leqq s\leqq T}\max_{s\leqq t\leqq s+Th}|B_t-B_s|$$

とおくと、Kanagawa [3] も示しているように

$$E[J(h)]=O(h^{1/2}(\log(1/h))^{1/2}) \to 0\ (h\to 0)$$

であることに注意しておく。

$$E\left[g_0(x^n(t_{k+1}));\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$= E\left[g_0(x^n(t_{k+1}));\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1},\ x^n(t_{k+1})\in[0,2\varepsilon)\cup(a-\varepsilon,+\infty)\right]$$

$$+ E\left[g_0(x^n(t_{k+1}));\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1},\ x^n(t_{k+1})\in[2\varepsilon,a-\varepsilon]\right]$$

$$\leqq \sup_{x\in[0,2\varepsilon)\cup(a-\varepsilon,+\infty)} g_0(x)\cdot P\left[t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right]$$

$$+\|g_0\|\ P\left[\max_{s\in I(k)}|x^n(t_{k+1})-x^n(s)|>\varepsilon,\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a)< t_{k+1}\right] \tag{4.5}$$

（ここで、$I(k)=[t_k,\ t_{k+1}]$ である。）

$s\in I(k)$ のとき、容易に分かるように、

$$x^n(t_{k+1})-x^n(s) = \{x^n(t_k)\}^{1/2}(B_{t'}-B_s)$$

$(t' = t_{k+1})$

であり、かつ　$t \leqq \tau^n(\varepsilon,a)$　のとき、$x^n(t) \leqq a$　だから

$| x^n(t_{k+1}) - x^n(s) | \leqq \sqrt{a} \quad | B_{t'} - B_s |$

となり、従って

（4．5）の右辺の第2項

$$\leqq \| g_0 \| \quad P[\max_{s \in I(k)} | B_{t'} - B_s | > \varepsilon / \sqrt{a},\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a) < t_{k+1}]$$

$$\leqq \| g_0 \| \{ P[\max_{s \in I(k)} | B_{t'} - B_s | > \varepsilon / \sqrt{a},\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a) < t_{k+1} \wedge T]$$

$$+ P[\tau^n(\varepsilon,a) \geqq T,\ t_k \leqq \tau^n(\varepsilon,a) < t_{k+1}] \}$$

kについて加えて

$$(4.4)\text{の右辺} \leqq 2(\delta - \| \Delta(n) \|)^{-1} \{ \| \Delta(n) \| + \sup_{x \in [0,\,2\varepsilon) \cup (a-\varepsilon,\,+\infty)} g_0(x) +$$

$$+ (a/\sqrt{\varepsilon}) E[J(\| \Delta(n) \|)] + (2/T)(g_0(x) + \| \Delta(n) \|) \}$$

(for any finite T)

従って、

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} P[| \tau^n(\varepsilon, a) - \tau^n(a) | > \delta]$$

$$= 2\delta^{-1} \{ \sup_{x \in [0,\,2\varepsilon) \cup (a-\varepsilon,\,+\infty)} g_0(x) + (2/T) g_0(x) \}$$

故に

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \overline{\lim_{n \to +\infty}} P[| \tau^n(\varepsilon, a) - \tau^n(a) | > \delta]$$

$$= 2\delta^{-1} (2/T) g_0(x)$$

となる。　ここで、Tは任意であったから

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ \overline{\lim_{n \to +\infty}} P[| \tau^n(\varepsilon, a) - \tau^n(a) | > \delta] = 0.$$

証明終わり。

Theorem 4.4

$$\lim_{n \to +\infty} \tau^n(a) = \tau(a) \quad \text{in probability} \qquad (4.6)$$

（証明）

Proposition 3.2 において、$S = C([0,+\infty), R^1)$,

$$d(\omega,\omega') = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\left[\max_{0\le t\le n} |\omega(t)-\omega'(t)| \wedge 1\right],$$

$(\omega,\omega'\in S)$,　$S' = [0,+\infty]$, $d'(x,x') = |\tan^{-1}x - \tan^{-1}x'|$

$(x,x'\in S')$ とし

$X_n = x^n(\cdot)$, $X = x(\cdot)$,

$h_k(\omega) = \inf\{t\geqq 0\,;\,\omega(t) = (1/k) \text{ or } a\}$,

$h(\omega) = \inf\{t\geqq 0\,;\,\omega(t) = 0 \text{ or } a\}$

とおく。　このとき、

$h_k(X_n) = \tau^n(1/k, a)$, $h(X_n) = \tau^n(a)$,

$h_k(X) = \tau(1/k, a)$,　$h(X) = \tau(a)$,

である。

定理　3．1により、Proposition 3.2の条件（a）は成り立ち、道の連続性から条件（B）の成り立つことは明らかであり、Lemma 4.3 により条件（C）が成り立つ。従って、Proposition 3.2によって、（4．6）が成り立つ。　　　証明終わり。

最後に、このノートの目的とする定理を述べる。

<u>Theorem 4.5</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \tau^n = \tau \quad \text{in probability} \qquad (4.7)$$

（証明）

再び、Proposition 3.2　を用いる。

S、d，S'，d'，X_n，Xは定理4．4の証明と同じとする。

$h_k(\omega) = \inf\{t\geqq 0\,;\,\omega(t) = 0 \text{ or } k\}$

$h(\omega) = \inf\{t\geqq 0\,;\,\omega(t) = 0\}$

とする。　このとき、

$h_k(X_n) = \tau^n(K)$, $h(X_n) = \tau^n$,

$h_k(X) = \tau(k)$,　$h(X) = \tau$,

定理4．4により、Proposition 3.2の条件（a）は成り立ち、$P[\tau<+\infty] = 1$ だから条件（b）は成り立つ。条件（c）をｃｈｅｃｋしよう。

$$P[d'(h_k(X_n), h(X_n)) > \varepsilon]$$

$$\leqq P[|\tau^n(K) - \tau^n| > \varepsilon] \leqq P[\tau^n(K) < \tau^n] \qquad (4.8)$$

ここで、martingale $\{x^n(t) - x\}$ の増加過程はτ^n迄はstrictly increasingであるから、この増加過程で　time change　すると、pathが原点に到達する迄は、Brown 運動となるため、（4．8）の右辺は　x／k　に等しい。

従って、条件（c）は満足される。　　　証明終わり。

References

[1] Ethier S.N. and Kurtz T.G.(1986) Markov Processes: Charactarization and Convergence. Wily, New York.

[2] Ikeda N. and Watanabe S.(1980) Stochastic Differential Equations and Diffusion processes. North-Holland/Kodansha, Amsterdam/Tokyo.

[3] Kanagawa S.(1989) The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations. Tokyo J.Math. 12, 33-48.

[4] Kaneko H. and Nakao S. A note on approximation for stochastic differential equations. Seminaire de Probabilites,,